Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
27 octombrie 2013
Soluţii
RUNDA a III-a

Problema 1. Fie $a,b>0, a\neq b.$ Să se rezolve ecuaţia

$$(a+b+x)\cdot\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)=\left(a^2+ab+b^2\right)\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Soluţie:

$$(a+b+x)\cdot\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}\right)=\left(a^2+ab+b^2\right)\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b+x}{a+x}+\frac{a+b+x}{b+x}=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2}+\frac{a^2+ab+b^2}{b^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a+x}+\frac{a}{b+x}=\frac{ab+b^2}{a^2}+\frac{a^2+ab}{b^2}\Leftrightarrow\frac{b}{a+x}-\frac{ab+b^2}{a^2}+\frac{a}{b+x}-\frac{a^2+ab}{b^2}=0\Leftrightarrow$$

$$b\cdot\frac{ab+x\cdot(a+b)}{a^2\cdot(a+x)}+a\cdot\frac{ab+x\cdot(a+b)}{b^2\cdot(b+x)}=0\Leftrightarrow\left[ab+x\cdot(a+b)\right]\cdot\left(\frac{b}{a^2\cdot(a+x)}+\frac{a}{b^2\cdot(b+x)}\right)=0;$$

Dacă $ab+x\cdot(a+b)=0\Rightarrow x=-\frac{a\cdot b}{a+b}$ -soluţie;

$$\frac{b}{a^2\cdot(a+x)}+\frac{a}{b^2\cdot(b+x)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}b^3\cdot(b+x)+a^3\cdot(a+x)=0\\a+x\neq 0\\b+x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}\text{ -soluţie}$$

Răspuns: S= $\left\{-\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3};-\frac{a\cdot b}{a+b}\right\}$

Problema 2. Numerele naturale nenule a,b,c,d satisfac condiţiile $a>b>c>d$, $a+b+c+d=1000$ şi $a^2-b^2+c^2-d^2=1000.$ Să se determine numărul de valori posibile ale lui a.

Soluţie: Scăzând cele două relaţii, obţinem $(a+b)\cdot(a-b-1)+(c+d)\cdot(c-d-1)=0.$
Cum însă ambii termeni sunt mai mare sau egali cu 0, rezultă că
$a-b-1=0$ şi $c-d-1=0\Rightarrow a=b+1$ şi c=d+1.
Din $a+b+c+d=1000\Rightarrow a+d=b+c=500;$
Numerele sunt $a,a-1,501-a,500-a.$ Mai trebuie ca
$a>a-1>501-a>500-a\Leftrightarrow a-1>501-a,500-a\geq 1\Leftrightarrow$
$2a>502; a\leq 499\Leftrightarrow a>251$ şi $a\leq 499\Leftrightarrow a\in\{252,253,...,499\}.$
Numărul valorilor posibile ale lui a este 248
Răspuns: 248

Problema 3. Să se determine numerele reale a,b,c pentru care mulţimea soluţiilor ecuaţiei $a\cdot\sin x+\sin 3x+b\cdot\sin 5x+c\cdot\sin 7x=0$ este $\left\{\frac{k\pi}{4}/\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Soluţie: Pentru $x=\frac{\pi}{2}$, obţinem $a-1+b-c=0;$

Pentru $x=\frac{\pi}{4}$, obţinem $a+1-b-c=0;$

Din aceste două relaţii rezultă $a=c$ şi $b=1$. Atunci ecuaţia se scrie

$a\cdot(\sin x+\sin 7x)+(\sin 3x+\sin 5x)=0\Leftrightarrow 2a\cdot\sin 4x\cdot\cos 3x+2\cdot\sin 4x\cdot\cos x=0\Leftrightarrow$

$\sin 4x\cdot(a\cos 3x+\cos x)=0\Leftrightarrow \sin 4x\cdot\cos x\cdot(2a\cos 2x-a+1)=0;$

Trebuie ca eventualele soluţii ale ecuaţiei $2a\cos 2x-a+1=0$ să se afle în mulţimea $M=\left\{\frac{k\pi}{4}/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ecuaţia nu are soluţii dacă $a=0$ sau $\frac{a-1}{2a}\notin[-1,1]\Leftrightarrow a\in\left(-1,\frac{1}{3}\right)$.

Ecuaţia are soluţii în M dacă $\frac{a-1}{2a}\in\{-1,0,1\}\Rightarrow a\in\left\{-1,\frac{1}{3},1\right\}$.

In concluzie, pentru ca ecuaţia să aibă soluţii în mulţimea M, este necesar şi suficient ca

$a=c\in\left[-1,\frac{1}{3}\right]\cup\{1\}$ şi $b=1$.

Răspuns: $a=c\in\left[-1,\frac{1}{3}\right]\cup\{1\}$ şi $b=1$.

Problema 4. Fie $A\in M_2(\mathbb{C})$ cu $\mathrm{Tr}A=1$ şi $\det A=2$ Să se calculeze

$\det\left(A^2-I_2\right)+\det\left(A^2+I_2\right)+\det\left(A^2+2\cdot I_2\right)+\det\left(A^3+I_2\right)$.

Soluţie: Din egalitatea Cayley –Hamilton rezultă

$A^2-A+2\cdot I_2=O_2\Rightarrow A^2+2\cdot I_2=A\Rightarrow\det\left(A^2+2\cdot I_2\right)=\det A=2;$

Stim că

$\det(A+B)+\det(A-B)=2\cdot\det A+2\cdot\det B;$

$\det\left(A^2+I_2\right)+\det\left(A^2-I_2\right)=2\cdot\det A^2+2\cdot\det I_2=8+2=10;$

$\det\left(A^3+I_2\right)=\det(A+I_2)\cdot\det\left(A^2-A+I_2\right).$

Polinomul caracteristic $x^2-x+2=0$ are rădăcinile λ_1,λ_2;

Polinomul caracteristic al matricei $A+I_2$ are rădăcinile

$1+\lambda_1,1+\lambda_2;$

$\det(A+I_2)=(1+\lambda_1)\cdot(1+\lambda_2)=1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\cdot\lambda_2=4;$

$A^2-A+I_2=-I_2\Rightarrow\det\left(A^2-A+I_2\right)=1$

$\begin{cases}\det\left(A^2-A+I_2\right)=1\\ \det(A+I_2)=4\end{cases}\Rightarrow\det\left(A^3+I_2\right)=4;$

Suma cerută este=16.

Răspuns:16.